ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Mai 1988

CONCOURS DE RECRUTEMENT
D'ELEVES-INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION
DE L'AVIATION CIVILE

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coef. : 2

Notations et définitions

$\mathbb{Q}$ désigne le corps des rationnels.
La valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}$ sera notée pour tout x rationnel : $|x|$.
La distance usuelle de $\mathbb{Q}$ est la distance définie par $d(x,y) = |x - y|$, pour tout couple (x,y) de rationnels.

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
Un entier naturel est un entier relatif positif ou nul.
Etant donnés a, b et p, trois entiers relatifs, on dira que a est congru à b modulo p (ce qui se notera $a \equiv b$, mod(p)) si et seulement s'il existe q entier relatif tel que $a - b = pq$.

D application de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nuls, est une distance sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si :

$D(x,y) = 0 \iff x = y$
$D(x,y) = D(y,x)$
$D(x,z) \leqslant D(x,y) + D(y,z)$
pour tous rationnels x, y et z.

Une suite (x_m) d'éléments de $\mathbb{Q}$ est convergente dans $\mathbb{Q}$ pour la distance D si et seulement s'il existe un rationnel ℓ tel que :
pour tout réel ε strictement positif il existe m_0 entier naturel tel que : $m > m_0 \Rightarrow D(x_m, \ell) < \varepsilon$; autrement dit $D(x_m, \ell)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$.

Une suite (x_m) d'éléments de $\mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy pour la distance D si et seulement si pour tout réel ε strictement positif il existe m_0 entier naturel tel que : $m > m_0$ et $n > m_0 \Rightarrow D(x_m, x_n) < \varepsilon$.

$\mathbb{Q}$ muni de la distance D est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour la distance D est une suite convergente dans $\mathbb{Q}$ pour la distance D.

Remarque : Les candidats sont autorisés à admettre des résultats donnés par l'énoncé du problème concernant des questions qu'ils n'arriveraient pas à résoudre pour traiter des questions suivantes.

PROBLEME

On appelle valeur absolue sur un corps $\mathbb{K}$ toute application V non constante de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout couple (x,y) d'éléments de $\mathbb{K}$ les deux relations suivantes :

(1) $V(x + y) \leqslant V(x) + V(y)$

(2) $V(xy) = V(x)\,V(y)$

On se propose d'étudier les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$.

I Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.

1°) Calculer V(0) , V(1) , V(-1) . Montrer que $V(x) \neq 0$ si $x \neq 0$.

2°) Calculer V(-x) et $V(x^r)$, où r est un entier relatif, en fonction de V(x), pour x rationnel non nul.
Montrer que $V(x) \leqslant |x|$ pour tout x entier relatif.

3°) On se donne deux entiers naturels a et b strictement supérieurs à 1.
Pour q entier naturel quelconque on écrit b^q dans le système de numération de base a :

$$b^q = c_m a^m + \ldots + c_i a^i + \ldots + c_1 a + c_0$$

, les c_i étant des entiers naturels strictement inférieurs à a, et c_m étant non nul.

a) On suppose que V(a) est strictement supérieur à 1.

Montrer que $V(b^q) \leqslant (m + 1)a\,(V(a))^m$

Montrer que lorsque l'on fait tendre q vers $+\infty$ le rapport m/q a pour limite Log b/Log a.

En déduire $(V(b))^{1/\text{Log } b} \leqslant (V(a))^{1/\text{Log } a}$

b) Etablir de même que si $V(a) \leqslant 1$ on a $V(b^q) \leqslant (m + 1)a$ et en déduire alors que $V(b) \leqslant 1$.

4°) Déduire de ce qui précède que si V est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ elle appartient à l'un, et à un seul, des trois types suivants :

- Type 1 : $V(x) = 1$ pour tout entier naturel x non nul.
- Type 2 : $V(x) \leqslant 1$ pour tout entier naturel x non nul, et l'inégalité est stricte pour au moins un tel x.
- Type 3 : $V(x) > 1$ pour tout entier x strictement supérieur à 1.

5°) Montrer qu'il existe une et une seule valeur absolue de type 1 sur $\mathbb{Q}$.

TSVP.

6°) a) On suppose qu'il existe sur $\mathbb{Q}$ une valeur absolue V de type 3.
Montrer qu'il existe un réel r tel que pour tout entier x strictement positif $V(x) = x^r$.
Que vaut alors V(x) pour x rationnel non nul ?

b) Soit r un réel et V l'application qui à 0 associe 0, et à tout x rationnel non nul associe $|x|^r$.
Montrer que V est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ de type 3 si et seulement si $0 < r \leqslant 1$.

7°) Soit V une valeur absolue de type 2 sur $\mathbb{Q}$.

a) x et y étant deux rationnels quelconques et n un entier strictement positif, montrer que : $V((x+y)^n) \leqslant (n+1)\ [\max\{V(x), V(y)\}]^n$.

En déduire : $V(x+y) \leqslant \max\{V(x), V(y)\}$.

b) Montrer que l'ensemble E des entiers relatifs x tels que V(x) soit strictement inférieur à 1 est un groupe additif.

Montrer qu'il existe un, et un seul, nombre premier positif tel que E soit l'ensemble des multiples de ce nombre premier.

c) Etant donné un nombre premier p positif, montrer que tout rationnel x non nul peut se mettre de façon unique sous la forme $x = \frac{a}{b} p^n$

où a et b sont deux entiers premiers entre eux (a entier positif, b entier relatif) et premiers avec p, et où n est un entier relatif.

d) On fixe p ; l'exposant n défini ci-dessus est ainsi une fonction de la variable rationnelle non nulle x, que l'on notera $n_p(x)$.

Montrer que $n_p(xy) = n_p(x) + n_p(y)$

et $n_p(x+y) \geqslant \min\{n_p(x), n_p(y)\}$

lorsque x, y et x+y pour la seconde relation, sont des rationnels non nuls.

e) p étant le nombre premier divisant tout entier q tel que $V(q) < 1$, comme défini au 7°b, montrer que pour tout x rationnel non nul on a : $V(x) = u^{n_p(x)}$ avec $u = V(p)$.

En déduire toutes les valeurs absolues de type 2 de $\mathbb{Q}$.

II V étant une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, on pose $d_V(x,y) = V(x-y)$ pour tout couple (x,y) de rationnels. On montre alors facilement que d_V est une distance sur $\mathbb{Q}$.

1°) On prend pour V la seule valeur absolue de type 1 sur $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ muni de la distance d_V est-il complet ?

2°) On suppose que V est de type 3.

a) Montrer qu'une suite de $\mathbb{Q}$ est convergente pour la distance d_V si et seulement si elle est convergente pour la distance usuelle.

b) Montrer qu'une suite de $\mathbb{Q}$ est une suite de Cauchy pour la distance d_V si et seulement si c'est une suite de Cauchy pour la distance usuelle.
$\mathbb{Q}$ muni de la distance d_V est-il complet ?

3°) On suppose que V est de type 2.

On reprend les notations p, n_p et u du 1.7°.e.
On se donne une suite d'entiers $c_0, c_1, \ldots c_m, \ldots$ tous compris au sens large entre 0 et p-1 et on pose :

$$x_0 = c_0$$
$$x_1 = c_0 + c_i\, p$$
$$\vdots$$
$$x_m = \sum_{i=0}^{m} c_i\, p^i$$
$$\vdots$$

a) Montrer que la suite de x_m ainsi obtenue est une suite de Cauchy pour la distance d_V.

b) On prend tous les c_m égaux à 1.
Montrer que la suite x_m converge dans $\mathbb{Q}$ pour la distance d_V et donner sa limite.
La suite x_m est-elle convergente pour la distance usuelle ?

c) On suppose ici $p \neq 2$.

Montrer que l'on peut bâtir par récurrence une suite (c_m) d'entiers compris entre 0 et p-1, tels que pour tout entier naturel m on ait :

$$x_m^2 \equiv 1 - p \quad , \quad \mathrm{mod}\ (p^{m+1})$$

Montrer que la suite (x_m) ainsi obtenue est divergente pour la distance d_V.

$\mathbb{Q}$ muni de d_V est-il complet ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail